

5. cvičení - Implicitní funkce 2

Příklad 1. Vypočítejte všechny parciální derivace funkce f pomocí řetízkového pravidla.

(a) $f(u, v) = u\sqrt{1+v^2}, u(x, y) = e^{2x}, v(x, y) = e^x$

(b) $f(u, v, w) = uv^2w^3, u(x, y) = -\sin x, v(x, y) = \cos x, w(x, y) = e^x$

(c) $f(u, v) = \sin u \cos v, u(x, y) = (x - y)^2, w(x, y) = x^2 - y^2$

(d) $f(u, v, w) = vw^2 - u^3, u(x, y, z) = e^{x-y}, v(x, y, z) = \log(x + 2y + 3z), w(x, y, z) = \sqrt{xy + z}$

Příklad 2. Ukažte, že funkce $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} \log x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ vyhovuje vztahu $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$.

Příklad 3. Nechť $g(x, y) = f(x + y, x - y)$. Spočítejte $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ v bodě $[a, b]$.

Příklad 4. Ukažte, že funkce $F(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

Příklad 5. Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v v proměnných x a y . Potom spočítejte parciální derivace obou funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

(a) $x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u}, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0]$.

(b) $xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$.

(c) $x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}]$.

(d) $5xu + 3yv = 4x^2yv + 4u^2v, \quad 4xyu^3 + xv^2 = 5yuv, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 1, 1, 1]$.

Příklad 6. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné y . Dále spočítejte její první i druhou derivaci v y_0 a napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě y_0 .

(a) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$.

(b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1, [x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$.

(c) $\arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, \pi]$.

Pokračování na další straně.



Příklad 7. (a) Jsou dány vztahy

$$e^{\frac{u}{x}} \cos\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{u}{x}} \sin\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x, y), v(x, y)$ třídy C^∞ . Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

- (b) Ukažte, že existují funkce $u(x, y), v(x, y)$ definované na nějakém U okolí bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1 , splňují $u(1, 2) = 0, v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Spočtěte $u'(1, 2), v'(1, 2)$.

- (c) Dokažte, že existují funkce $z(x, y), t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U bodu $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - 3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2, t(1, -1) = 0$. Spočtěte $z''(1, -1)$.

- (d) Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y), v(x, y)$ třídy C^∞ , které splňují $u(3, 3) = 2, v(3, 3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.

- (e) Spočtěte x_v, y_v, z_v , pokud

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - 2xy^2, \quad z = \log(y^2 - x^2)$$

v bodě $u = 5, v = -7, x(5, -7) = 1, y(5, -7) = 2$. *Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, z_v pak vyjádřete řetězovým pravidlem.*

- (f) Ukažte vztahy

$$u = \log(x^2 + y^2) - 2xy, \quad v = e^x \sin y \frac{1}{x^2}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, 1) = 1, y(0, 1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x, y definovaná na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ předpisem $z(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u, v] = [0, 1]$ předpisem $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$.

Příklad 8 (Bez vzorového řešení). V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x . Dále spočtěte její první i druhou derivaci v x_0 a napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě x_0 .

(a) $\log \frac{\tan x + 2 \tan y}{3} + \log \frac{2 \tan x + \tan y}{3} = 0, [x_0, y_0] = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}].$

(b) $\sin(e^x - e^y) + 3 \sin \frac{x+y}{2} + \cos(x - y) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, \pi].$

(c) $\log(x + y^3) + e^{x+2y} = 1, [x_0, y_0] = [2, -1].$

(d) $e^{x^2+y-2} + e^{y^2-x} = 2, [x_0, y_0] = [1, 1].$

